SESSION DE 1980

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les trois exercices sont indépendants. Le barème de correction attribuera environ 13 points sur 20 au troisième exercice. Il sera tenu compte de la qualité des explications fournies.

PREMIER EXERCICE

Soient a et b deux réels.

1° Former le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de $x = 0$, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + ax + bx^2}.$$

2° Étudier, suivant les valeurs de a et de b, la convergence et la convergence absolue de la série de terme général :

$$u_n = \sin\left(\pi \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn}\right).$$

Tournez la page S. V. P.

DEUXIÈME EXERCICE

Dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $O\,x\,y\,z$, on considère les points A $(-2, 2, 1)$ et B $(1, 2, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux, et leurs normes sont égales.

On oriente le plan OAB de façon que l'une des déterminations de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ soit $+\frac{\pi}{2}$. Soit Γ le cercle de centre O qui contient A et B.

1° Exprimer les coordonnées d'un point M de Γ en fonction de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

2° Calculer l'intégrale, sur Γ parcouru dans le sens positif, de la forme différentielle

$$\omega = \frac{dx}{5 + y + z}.$$

TROISIÈME EXERCICE

Soient :

E l'espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$, des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables;

n un entier strictement positif;

V_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynômes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n;

φ l'endomorphisme de E qui, à toute fonction y de E, associe :

$$\varphi(y) = (1 + x^2)\,y'' + 2\,x\,y'.$$

1° *a.* Montrer que V_n est stable par φ.

Soit φ_n la restriction de φ à V_n.

b. Écrire la matrice de φ_n dans la base $(1, x, \ldots, x^n)$.

c. Trouver les valeurs propres de φ_n.

d. Dans le cas $n = 3$, trouver les éléments suivants de φ_n : vecteurs propres, noyau, image.

.../...

INSTITUT DE CHIMIE DE ROUEN 1980 -115-

2° *a.* Trouver le noyau de φ.

b. Montrer que φ est surjective (*on cherchera les solutions, dans* E, *de l'équation différentielle* $\varphi(y) = f$, *où* f *est donnée dans* E).

c. Expliciter les fonctions de E dont l'image par φ est la fonction

$$x \to \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

3° On admet que, si λ est un réel quelconque, l'ensemble des fonctions y de E qui satisfont à l'équation différentielle :

$$(1) \qquad (1+x^2)\,y'' + 2\,x\,y' - \lambda\,y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de E, de dimension 2.

a. Quel est l'ensemble des valeurs propres de φ?

b. Chercher les séries entières $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,x^k$, dont le rayon de convergence R est différent de zéro, et dont la somme est solution de (1) sur $]-R, +R[$.

Vérifier qu'il existe deux telles séries, soient S_0 et S_1, dont les sommes respectives y_0 et y_1 sont telles que :

$$y_0(0) = y_1'(0) = 0 \qquad y_0'(0) = y_1(0) = 1.$$

A quelle condition l'une des séries S_0 ou S_1 se réduit-elle à un polynôme?

c. Dans le cas $\lambda = 2$, exprimer les sommes de S_0 et S_1 à l'aide de fonctions usuelles.

Quel est le sous-espace propre de φ relatif à la valeur propre 2?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail